prof. dr hab. Józef Banaś
dr Dorota Dejniak
Międzyinstytutowy Zakład Matematyczno-Przyrodniczy
Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Jarosławiu

Modelowanie równowagi rynkowej z zastosowaniem teorii równań różniczkowych

WPROWADZENIE

Prezentowana praca poświęcona jest matematycznemu modelowaniu sytuacji ekonomicznej, zwanej równowagą rynkową [por. Banaś, 2007; Begg, Fischer, Dornbusch, 1996; Chiang, 1994; Varian, 2002].

Można z całą pewnością stwierdzić, że sytuacja ekonomiczna, zwana równowagą rynkową, jest najbardziej pożądaną sytuacją w gospodarce każdego kraju. Trzeba sobie jednak zdać sprawę z faktu, że jest to sytuacja raczej idealna, trudna do zrealizowania w realnych warunkach ekonomicznych.

Z drugiej strony nietrudno zauważyć, że brak równowagi rynkowej ze względu na wiele towarów powoduje duże dysproporcje w podziale dochodu narodowego, które są tym większe, im większe są perturbacje w zachowaniu równowagi rynkowej. Z kolei taka sytuacja powoduje powstawanie nierówności społecznych, które są niejednokrotnie dotkliwie odczuwalne przez duże grupy społeczeństwa.

Zajmiemy się teraz opisaniem podstawowych przesłanek ekonomicznych, które definiują równowagę rynkową.

Społeczeństwo musi znaleźć jakiś sposób decydowania o tym, co, jak, dla kogo i jak wiele wytwarzać. Jak odnotowują niektórzy autorzy [Chiang, 1994; Varian, 2002], gospodarki państw zachodnich, wysoko rozwiniętych, w procesie alokacji zasobów – tzn. planu użycia i zagospodarowania dostępnych środków – wykorzystują w szerokim zakresie mechanizm rynku i cen. W mechanizmie tym wzajemna gra popytu (zachowania konsumentów) przesądza o ilości wytwarzanych dóbr oraz o cenie, po jakiej te dobra są sprzedawane.

Dlatego tak ważne znaczenie ma w ekonomi jedno z jej fundamentalnych pojęć, którym jest właśnie *równowaga rynkowa.* Ogólnie określa się tak sytuację, w której wszystkie siły rynkowe równoważą się, a wartości zmiennych ekonomicznych pozostają niezmienne.

W szczególności, mianem równowagi rynkowej określa się stan rynku, w którym ilość dóbr nabywanych przez konsumentów równa jest ilości tych dóbr wytwarzanych przez producentów. Innymi słowy – wyrażamy tą ideę mówiąc, że równowaga rynkowa jest to stan rynku, w którym wielkość popytu na tym rynku jest równa wielkości podaży. Takie określenie sensu równowagi rynkowej jest najczęściej przyjmowane w ekonomii [por. Begg, Fischer, Dornbusch, 1996; Varian, 2002].

Czynnikiem równoważącym podaż i popyt jest zazwyczaj cena, która, jeśli występuje równowaga rynkowa, nazywana jest *ceną równowagi rynkowej.* Graficznym odzwierciedleniem stanu równowagi rynkowej jest *punkt równowagi rynkowej,* czyli punkt przecięcia krzywej popytu z krzywą podaży.

Zwróćmy uwagę na to, że pojęcie równowagi rynkowej jest pojęciem należącym do tzw. ekonomii pozytywnej. Stwierdzenie takie oznacza, że równowaga rynkowa sama w sobie niekoniecznie musi być stanem pożądanym przez społeczeństwo. Na przykład, możliwa jest sytuacja, w której rynek żywności znajduje się w równowadze, podczas gdy sporej części społeczeństwa nie stać na to, żeby nabyć wystarczającą ilość żywności z powodu zbyt wysokiej ceny równowagi rynkowej. Wynika stąd wniosek, że brak równowagi rynkowej nie zawsze musi być podstawowym czynnikiem wpływającym na powstawanie nierówności społecznych.

Tym niemniej, w wielu sytuacjach obserwowanych w gospodarkach różnych krajów, nierówności społeczne są dość często powodowane przez znaczne zachwianie równowagi rynkowej. Ma to szczególne miejsce w gospodarkach sterowanych centralnie, a więc przede wszystkim w gospodarkach krajów, które nie podlegają prawidłom wolnego rynku. Widać to na przykładzie takich państw jak Korea Północna, Białoruś, Boliwia, Ekwador, większość krajów afrykańskich itp.

Podaż oferowana społeczeństwu w takich krajach jest zbyt mała w stosunku do popytu, co powoduje powstawanie grup uprzywilejowanych, mających na ogół swobodny dostęp do wytwarzanej produkcji. Natomiast większość społeczeństwa takich krajów cierpi na niedostatek w dostępie do wytwarzanych towarów i oferowanych usług. Oczywiste jest, że występuje tutaj brak równowagi rynkowej, w efekcie czego powstają bardzo duże nierówności społeczne.

Jak wyżej wspomnieliśmy, brak równowagi rynkowej spowodowany nadwyżką podaży nad popytem również jest źródłem wielu nierówności społecznych.

W przedkładanej pracy zajmiemy się matematycznym opisem modelu równowagi rynkowej. Przedstawimy najpierw model uproszczony, zwany *modelem liniowym.* Jest to model zazwyczaj dyskutowany w pozycjach poświęconych ekonomii matematycznej [zob. Banaś, 2007; Chiang, 1994; Varian, 2002]. Zaletą tego modelu jest z pewnością jego przejrzystość i prostota. Jednakże zjawiska ekonomiczne są na ogół tak bardzo skomplikowane, że trudno jest oczekiwać, aby model liniowy dobrze opisywał rzeczywistość ekonomiczną. Uzyskany w liniowym modelu równowagi rynkowej, opisywanym przy pomocy równania różniczkowego liniowego, wniosek stwierdzający, że równowaga rynkowa jest zjawiskiem stabilnym (a nawet asymptotycznie stabilnym), wydaje się być dość odległy od realiów gospodarczych.

W pracy podjęto próbę stworzenia *nieliniowego modelu* równowagi rynkowej. Opisany w pracy model omawia w zasadzie tylko jeden przypadek, gdy szybkość zmiany ceny towaru jest funkcją kwadratową nadwyżki popytu nad podażą. Już w tej sytuacji rozwiązanie równania różniczkowego modelującego równowagę rynkową nie musi być zawsze stabilne. Odpowiada to bardziej realiom ekonomicznym.

Metodologia badań zjawiska równowagi rynkowej zastosowana w przedkładanej pracy inicjuje nowy kierunek badań i jej zadowalające rozwinięcie wymagać będzie zarówno użycia bardziej zaawansowanych narzędzi matematycznych, jak i głębszych interpretacji zależności ekonomicznych.

Autorzy zamierzają kontynuować zapoczątkowany w tej pracy kierunek badań.

LINIOWY MODEL RÓWNOWAGI RYNKOWEJ

Zajmiemy się teraz przedstawieniem tzw. modelu liniowego gospodarki rynkowej [por. Chiang, 1994]. W opisie tego modelu posłużymy się podstawowymi pojęciami teorii równań różniczkowych. Pojęcia te należą do najbardziej elementarnych i można je znaleźć w kursowych podręcznikach dotyczących równań różniczkowych i ich zastosowań [zob. Banaś, 2007; Matwiejew, 1970; Pelczar, Szarski, 1987; Żakowski, Leksiński, 1984].

W celu przedstawienia wyżej zapowiedzianego liniowego modelu równowagi rynkowej załóżmy, że na rynku (wyizolowanym) znajduje się tylko jedno dobro konsumpcyjne. Oznaczmy przez P cenę tego dobra. Następnie, niech Q_d oznacza wielkość popytu na to dobro, natomiast Q_s oznaczać będzie wielkość podaży dobra.

Będziemy dalej zakładać, opierając się na obserwacji rynku, że Q_d jest malejącą funkcją liniową ceny, tzn. Q_d jest funkcją mającą postać:

$$Q_d = \alpha - \beta P \,, \tag{1}$$

gdzie α i β są pewnymi stałymi dodatnimi. Ponadto przyjmujemy założenie, że Q_s jest rosnącą funkcją liniową ceny, tzn. jest funkcją postaci:

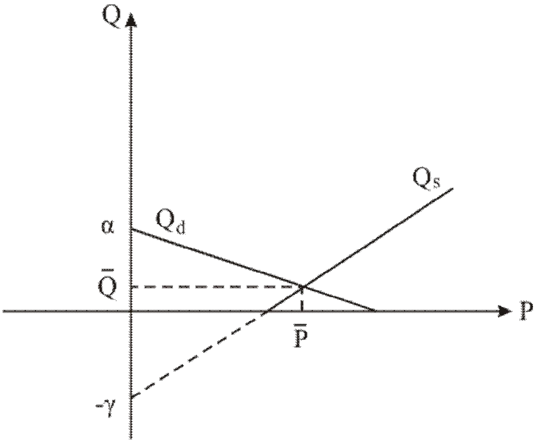
$$Q_s = -\gamma + \delta P \,, \tag{2}$$

gdzie $\gamma>0$ i $\delta>0$ są pewnymi stałymi. Będziemy również zakładać, że podaż nie występuje dopóty, dopóki cena nie przekroczy pewnego ustalonego poziomu dodatniego.

Zauważmy teraz, że równowaga na modelowanym rynku zachodzi wtedy, gdy:

$$Q_s = Q_d \,. \tag{3}$$

Cenę, przy której ma miejsce równowaga, będziemy oznaczać przez $\bar{P}$ i będziemy nazywać ceną równowagi. Na rysunku 1 przedstawiony jest omawiany model rynku.



Rys. 1

Łącząc zależności (1), (2) i (3) otrzymujemy, iż cena równowagi $\bar{P}$ daje się wyrazić następująco:

$$\bar{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \quad . \tag{4}$$

Zwróćmy teraz uwagę na to, że wszystkie trzy rozważane wielkości P, Q_s i Q_d zmieniają się w czasie, a więc są funkcjami czasu t.

Będziemy w dalszym ciągu zakładać, że szybkość zmiany ceny jest w każdym momencie czasu wprost proporcjonalna do nadwyżki popytu nad podażą w tym momencie, tzn., że ma miejsce równość:

$$\frac{dP}{dt} = j(Q_d - Q_s) \ , \tag{5}$$

gdzie j jest tzw. *współczynnikiem dostosowania.*

Przyjęte wyżej założenie o proporcjonalnej szybkości zmiany ceny nadwyżki popytu nad podażą, które prowadzi do równania (5), jest podstawowym założeniem w konstrukcji liniowego modelu równowagi rynkowej.

Korzystając dalej z zależności (5) oraz (1) i (2), dostajemy:

$$\frac{dP}{dt} = j(\alpha + \gamma) - j(\beta + \delta)P \ .$$

Stąd otrzymujemy następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{dP}{dt} + j(\beta + \delta)P = j(\alpha + \gamma) \ . \tag{6}$$

Otrzymane wyżej równanie różniczkowe jest równaniem liniowym pierwszego rzędu, o współczynnikach stałych. Funkcją niewiadomą w tym równaniu jest funkcja ceny $P = P(t)$.

Nietrudno sprawdzić, że funkcja stała:

$$P(t) = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \bar{P}$$

jest rozwiązaniem szczególnym tego równania.

Opierając się na twierdzeniu [zob. Pelczar, Szarski, 1987], które mówi, że rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego daje się przedstawić jako suma rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego, łatwo przekonać się, że rozwiązanie ogólne równania (6) ma postać:

$$P(t) = \left[P(0) - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right] e^{-j(\beta+\delta)t} + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = (P(0) - \bar{P})e^{-kt} + \bar{P} \ , \tag{7}$$

gdzie podstawiliśmy $k = j(\beta + \delta) > 0$.

Z otrzymanego rozwiązania (7) równania (6) widać, że przy $t \to \infty$ cena $P(t)$ zmierza do ceny równowagi $\bar{P}$.

Oznacza to, że wszystkie rozwiązania równania różniczkowego (6) zbliżają się, przy $t \to \infty$, dowolnie blisko do rozwiązania $P(t) = \bar{P}$. W teorii równań różniczkowych wyrażamy to mówiąc [por. Żakowski, Leksiński, 1984], że rozwiązanie $P(t) = \bar{P}$ jest *asymptotycznie stabilne.*

Przedstawimy teraz precyzyjny dowód tego faktu, który nawiązuje do ścisłej definicji pojęcia asymptotycznej stabilności podanej np. we wspomnianej wyżej pozycji Żakowskiego i Leksińskiego [1984].

W tym celu weźmy dowolnie ustaloną liczbę $\varepsilon > 0$. Niech $P(t) = \bar{P} = (\alpha + \gamma)/(\beta + \delta)$ będzie wspomnianym wyżej rozwiązaniem równania różniczkowego (6), o którym zamierzamy udowodnić, że jest asymptotycznie stabilne. Oczywiście dla tego rozwiązania mamy, że $P(0) = \bar{P}$.

Rozważmy dalej dowolne inne rozwiązanie $P^* = P^*(t)$ równania różniczkowego (6). Zgodnie z (7), rozwiązanie to ma postać:

$$P^*(t) = (P^*(0) - \bar{P})e^{-kt} + \bar{P} \ ,$$

dla $t \geq 0$, gdzie przyjęliśmy, że $k = j(\beta + \delta) > 0$.

Załóżmy, że w punkcie początkowym $t_0 = 0$ zachodzi nierówność

$$|P^*(0) - \bar{P}| < \varepsilon \,. \tag{8}$$

Wtedy, dla dowolnego *t>0* otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |P^*(t) - P(t)| &= \left|(P^*(0) - \bar{P})e^{-kt} + \bar{P} - \bar{P}\right| = \\ &= |P^*(0) - \bar{P}|e^{-kt} \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Ponieważ *k>0* więc *–k<0*, a to implikuje, że:

$$e^{-kt} < e^0 = 1$$

dla *t>0*. Stąd oraz z (8) i (9) dostajemy:

$$|P^*(t) - P(t)| < |P^*(0) - \bar{P}| < \varepsilon$$

dla dowolnego *t>0*. Oznacza to, że rozwiązanie $P(t) = \bar{P}$ równania różniczkowego (6) jest stabilne [por. Żakowski, Lesiński, 1984].

Z drugiej strony, mamy dalej:

$$\lim_{t\to\infty}(P^*(t) - \bar{P})^2 = \lim_{t\to\infty}(P^*(0) - \bar{P})^2 e^{-2kt} = 0 \,.$$

Otrzymana wyżej równość w połączeniu z uzyskaną już stabilnością rozwiązania $P(t) = \bar{P}$ oznacza, że rozwiązanie to jest asymptotycznie stabilne.

Pokazaliśmy zatem, że rozwiązanie równania różniczkowego (6), modelującego liniowo równowagę rynkową, jest asymptotycznie stabilne.

Z punktu widzenia interpretacji ekonomicznej oznacza to, że w bardzo długim czasie, na rynku zachowującym się zgodnie z założeniami naszego modelu liniowego, ceny towarów powinny przybliżać się do ceny równowagi rynkowej.

NIELINIOWY MODEL RÓWNOWAGI RYNKOWEJ

Przypomnijmy, że w konstrukcji liniowego modelu równowagi rynkowej przyjęliśmy założenie, że szybkość zmiany ceny jest w każdym momencie czasu *t* wprost proporcjonalna do nadwyżki popytu nad podażą, tzn., że ma miejsce równość:

$$\frac{dP}{dt} = j(Q_d - Q_s) \,,$$

gdzie *j* jest współczynnikiem dostosowania.

Otóż założenie to wydaje się być nie do końca zgodne z realną sytuacją na rynku. Można się oczywiście zgodzić z tym, że szybkość zmiany ceny towaru powinna być funkcją nadwyżki popytu nad podażą, tzn., że powinna mieć miejsce zależność:

(10) $$\frac{dP}{dt} = jf(Q_d - Q_s) \ ,$$

ale wydaje się, że funkcja f występująca w powyższej zależności nie musi być funkcją liniową.

Nie będziemy dalej dyskutować ogólnego przypadku funkcji f w równaniu (10), gdyż taka dyskusja wymagałaby z pewnością użycia wyrafinowanych narzędzi matematycznych. Celem tej pracy jest przede wszystkim zwrócenie uwagi na możliwość konstrukcji i rozważania nieliniowego modelu równowagi rynkowej postaci (10).

Niemniej jednak przeprowadzimy szczegółową dyskusję przypadku, gdy funkcja f występująca w równaniu różniczkowym (10) jest funkcją kwadratową, tzn. gdy $f(x) = x^2$. Wtedy równanie to przybiera postać:

$$\frac{dP}{dt} = j(Q_d - Q_s)^2 \ .$$

Stąd, po uwzględnieniu (1) i (2), otrzymujemy:

(11) $$\frac{dP}{dt} = j[(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)P]^2 \ .$$

Wprowadzając dla uproszczenia oznaczenia:

$$a = \alpha + \gamma \ ,$$
$$b = \beta + \delta \ ,$$

możemy powyższe równanie zapisać w postaci:

(12) $$\frac{dP}{dt} = j(a - bP)^2 \ .$$

Otrzymane równanie jest klasycznym równaniem różniczkowym pierwszego rzędu sprowadzalnym do równania o zmiennych rozdzielonych [por. Banaś, 2007; Żakowski, Leksiński, 1984].

Rzeczywiście, dokonując podstawienia $z = a - bP$, gdzie z jest funkcją zmiennej t, tzn., $z = z(t)$, otrzymujemy, że $z' = -bP'$. Stąd, po podstawieniu do (12), dostajemy:

$$-\frac{1}{b}\frac{dz}{dt}=jz^2$$

lub

$$\frac{dP}{z^2}=-bjdt \ .$$

Całkując obie strony powyższej równości, otrzymujemy:

$$-\frac{1}{z}=-bjt-k \ ,$$

a stąd dostajemy, że:

$$z=\frac{1}{bjt+k} \ , \qquad (13)$$

gdzie *k* jest dowolną stałą.

Podstawiając teraz z powrotem w miejsce zmiennej *z* wyrażenie *a-bP*, otrzymujemy z (13), że rozwiązanie ogólne równania (13) ma postać:

$$P(t)=\frac{abjt-1+ka}{b(bjt+k)} \ . \qquad (14)$$

Kładąc w (14) *t=0*, dostajemy:

$$P(0)=\frac{ka-1}{bk}=\frac{a}{b}-\frac{1}{bk} \ .$$

Stąd mamy:

$$k=\frac{1}{a-bP(0)} \ .$$

Uwzględniając powyższą równość w (14), otrzymamy:

$$P(t)=\frac{abjt-1+\frac{1}{a-bP(0)}}{b\left[bjt+\frac{1}{a-bP(0)}\right]} \ ,$$

a stąd, po przekształceniach, dostajemy:

$$P(t)=\frac{\big(a-bP(0)\big)abjt+bP(0)}{b\left[\big(a-bP(0)\big)bjt+1\right]} \ . \qquad (15)$$

Z równości (15), po podzieleniu licznika i mianownika prawej strony tej równości przez zmienną *t*, przy $t\to\infty$, otrzymujemy:

$$P_\infty = \lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\left(a - bP(0)\right)abj + \frac{bP(0)}{t}}{b\left[\left(a - bP(0)\right)bj + \frac{1}{t}\right]} =$$

$$= \frac{a}{b} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \,. \tag{16}$$

Nietrudno sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że funkcja stała P_∞, zadana wzorem (16), spełnia równanie różniczkowe (12), tzn. jest rozwiązaniem szczególnym tego równania.

Z przeprowadzonego wyżej rachunku wynika oczywiście, że wszystkie rozwiązania $P = P(t)$ równania różniczkowego (12) zmierzają w nieskończoności do rozwiązania P_∞. Oznacza to, że P_∞ jest stanem równowagi rynkowej w naszym modelu.

W teorii równań różniczkowych i całkowych mówi się wtedy, że rozwiązanie P_∞ *przyciąga* wszystkie rozwiązania równania (12) [por. Banaś, Dhage, 2008] lub, że P_∞ jest *atraktorem* równania różniczkowego (12).

Pokażemy teraz, że w wielu sytuacjach rozwiązanie P_∞ modelujące równowagę rynkową jest stabilne, a nawet asymptotycznie stabilne w sensie definicji przyjętych np. u Żakowskiego i Leksińskiego [1984].

Rozważmy mianowicie przypadek, gdy:

$$a - bP(0) > 0 \,. \tag{17}$$

Geometrycznie powyższy warunek oznacza, że rozwiązanie $P = P(t)$ równania różniczkowego (12) (lub (11)) wychodzi w chwili $t=0$ z punktu poniżej stanu równowagi, bowiem z (17) otrzymujemy, że $P(0) < a/b = P_\infty$.

Załóżmy dalej, że $\varepsilon > 0$ jest dowolnie ustaloną liczbą oraz, że $P = P(t)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania (12) takim, że:

$$|P_\infty - P(0)| = P_\infty - P(0) < \varepsilon \,.$$

Wtedy, mając na uwadze (15), dla dowolnego $t>0$ dostajemy:

$$|P(t) - P_\infty| = \left| \frac{\left(a - bP(0)\right)abjt + bP(0)}{b\left[\left(a - bP(0)\right)bjt + 1\right]} - \frac{a}{b} \right|$$

$$= \frac{1}{b}\left| \frac{\left(a - bP(0)\right)abjt + bP(0) - a\left(a - bP(0)\right)bjt - a}{\left(a - bP(0)\right)bjt + 1} \right|$$

$$= \frac{1}{b}\,\frac{a - bP(0)}{\left(a - bP(0)\right)bjt + 1} < \frac{a - bP(0)}{1} = a - bP(0) < \varepsilon \,.$$

Oznacza to, że rozwiązanie $P = P(t)$ równania różniczkowego (12) jest stabilne.

Zauważmy dalej, że asymptotyczna stabilność rozwiązania $P = P(t)$ równania (12) jest konsekwencją wyżej obliczonej w (16) granicy, tzn. równości:

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = P_\infty \ .$$

Na koniec naszych rozważań zauważmy, że w przypadku, gdy $a\text{-}bP(0)<0$, nie uzyskamy już stabilności rozwiązania P_∞ równania różniczkowego (12), a jedynie „przyciąganie" przez to rozwiązanie wszystkich innych rozwiązań naszego równania.

Pominiemy tutaj żmudne rachunki.

PODSUMOWANIE

Podsumowując rozważania prowadzone w tej pracy zwróćmy uwagę na to, że przyjęcie założenia, jakie ma miejsce w modelu liniowym, że szybkość zmiany ceny towaru jest proporcjonalna do nadwyżki popytu nad podażą, jest bardzo dużą idealizacją realiów ekonomicznych. Wydaje się, że taki model można stosować w niezbyt długich przedziałach czasowych dla gospodarek krajów dobrze rozwiniętych, w których większość mieszkańców dysponuje dużymi zasobami finansowymi.

Wiadomo jednak, że nawet w takich krajach jak USA redystrybucja dochodu narodowego jest bardzo nierówna, gdyż większość środków finansowych znajduje się w posiadaniu stosunkowo małej grupy ludzi. Zatem w tym przypadku, nierówności społeczne mają *a priori* bardzo duży wpływ na zjawisko równowagi rynkowej oraz na jego modelowanie.

Należałoby w takim przypadku oczekiwać, że szybkość zmiany ceny towarów i usług nie będzie proporcjonalna do nadwyżki popytu nad podażą, a będzie nieco inną funkcją tej nadwyżki. Przyjęte w pracy założenia, związane z omawianym modelem nieliniowym równowagi rynkowej, że wspomniana szybkość jest funkcją kwadratową nadwyżki popytu nad podażą, wydaje się być dość realne. Wynika to z własności funkcji kwadratowej, która dla małych liczb (w tym przypadku dla małych wartości nadwyżki popytu nad podażą) przyjmuje bardzo małe wartości, natomiast jej wartości są bardzo duże dla dużych nadwyżek popytu nad podażą.

Jak wspomniano na początku pracy, omawiany w tej pracy model nieliniowy jest tylko wprowadzeniem w bardziej wyrafinowane badania modelu równowagi rynkowej, które powinny się pojawić jako efekt badań zapoczątkowanych w tej pracy.

Oczywiście nierówności społeczne powstają bardzo często w wyniku dużych rozbieżności między popytem a podażą. Dlatego też omawiany w tej pracy model nieliniowy wydaje się być lepiej dopasowany do wyjaśnienia wpływu zachowania równowagi rynkowej na kształtowanie się nierówności społecznych.

LITERATURA

Banaś J., 2007, *Podstawy Matematyki dla Ekonomistów*, Wydawnictwa Naukowo--Techniczne, Warszawa.

Banaś J., Dhage B.C., 2008, *Global asymptotic stability of solutions of a functional integral equation*, "Nonlinear Analysis", 62.

Begg D., Fischer A., Dornbusch R., 1996, *Mikroekonomia*, PWN, Warszawa.

Chiang A.C., 1994, *Podstawy Ekonomii Matematycznej*, PWE, Warszawa.

Matwiejew N.M., 1970, *Metody Całkowania Równań Różniczkowych Zwyczajnych*, PWN, Warszawa.

Pelczar A., Szarski J., 1987, *Wstęp do teorii równań różniczkowych. Wstęp do teorii równań zwyczajnych i równań cząstkowych pierwszego rzędu*, PWN, Warszawa.

Varian H., 2002, *Mikroekonomia*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

Żakowski W., Leksiński W., 1984, *Matematyka*, cz. IV, Wydawnictwa Naukowo--Techniczne, Warszawa.

Streszczenie

W pracy opisany jest model równowagi rynkowej przy użyciu narzędzi teorii równań różniczkowych. Rozważa się najpierw znany liniowy model równowagi rynkowej pokazując, że rozwiązanie pojawiającego się w tym modelu równania różniczkowego, które modeluje równowagę rynkową, jest asymptotycznie stabilne.

Jako uogólnienie modelu liniowego rozważa się również równanie różniczkowe modelujące nieliniowo równowagę rynkową. Dla pewnego szczególnego przypadku modelu nieliniowego pokazuje się, że rozwiązanie modelujące równowagę rynkową w tym modelu jest w pewnych przypadkach asymptotycznie stabilne, natomiast w pozostałych przypadkach przyciąga inne rozwiązania otrzymane w tym modelu.

Modelling of the Market Balance With the Application of the Theory of Differential Equations

Summary

In the paper we describe a model of the market balance with the use of tools of the theory of differential equations. First, there is considered a well known linear model of the market balance. We show that a solution of a differential equation appearing in that model of the market balance, is asymptotically stable.

As a generalization of the linear model we consider also a differential equation modeling nonlinearly the market balance. For a particular case of that nonlinear model it is shown that a solution modelling the market balance is asymptotically stable in some cases. Apart from that, in other cases, that solution is attractive for other solutions obtained in that model.